

2015 Gene Golub SIAM Summer School

Υπολογιστική Γραμμική Άλγεβρα με Τυχαιότητα στους Δελφούς

Το διάστημα 15-26 Ιουνίου 2015 είχαμε την τύχη να διοργανώσουμε εκπροσωπώντας το Τμήμα και το Πανεπιστήμιο, το [2015 Gene Golub SIAM Summer School \(G2S3\)](#). Τα θερινά αυτά σχολεία διεξάγονται ετησίως υπό την αιγίδα και γενναιόδωρη χορηγία του Society for Industrial



and Applied Mathematics (SIAM) που θεωρείται από τους σημαντικότερους οργανισμούς Εφαρμοσμένων Μαθηματικών στον κόσμο. Στο 2015 G2S3 συμμετείχαν [50 μεταπτυχιακοί φοιτητές και υποψήφιοι διδάκτορες](#) προερχόμενοι από κορυφαία πανεπιστήμια (Stanford, Berkeley, MIT, Yale, Oxford, Princeton, Michigan, Purdue, Carnegie-Mellon, Chicago, Cornell, Edinburgh, TU Berlin, KU Leuven, EPF Lausanne, Paris-Sud, κ.λπ.), καθώς και 2 μεταπτυχιακοί μας. [Διδάσκοντες](#) ήταν οι Πέτρος

Δρινέας (Rensselaer Polytechnic Institute), Ilse Ipsen (North Carolina State University), Michael Mahoney (UC Berkeley), Ken Clarkson (IBM Almaden) και Ευστράτιος Γαλλόπουλος (ΤΜΗΥΠ). Πέραν της διδασκαλίας, το [πρόγραμμα](#) παρείχε την ευκαιρία για πολλές άλλες δραστηριότητες, όπως ασκήσεις θεωρίας, ομαδικές εργασίες, παρουσιάσεις λογισμικού, σύντομες παρουσιάσεις της έρευνας των συμμετεχόντων και επισκόπηση ανοικτών προβλημάτων.

Το θέμα του φετινού σχολείου ήταν η *Τυχαιότητα στην Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα (Randomization in Numerical Linear Algebra, εφεξής RandNLA)*. Η πολύ ενδιαφέρουσα αυτή περιοχή¹ βρίσκεται στην αιχμή της Θεωρίας της Επιστήμης των Υπολογιστών, των Πιθανοτικών Μεθόδων, της Υπολογιστικής Γραμμικής Άλγεβρας και της Υπολογιστικής Υψηλών Επιδόσεων και γνωρίζει μεγάλη ανάπτυξη, καθώς αφορά τη θεωρία και σχεδίαση λογισμικών εργαλείων για την διαχείριση δεδομένων μεγάλου όγκου (Big Data) που σήμερα εμφανίζονται σε πλήθος εφαρμογών, όπως στα οικονομικά, στην ανάκτηση πληροφορίας, στην ανάλυση δικτύων, στη βιοπληροφορική (τεχνικές RandNLA χρησιμοποιηθήκαν για τον εντοπισμό της προέλευσης των αρχαίων Μινωιτών και των σύγχρονων Κρητών), καθώς και στην ανάλυση επιστημονικών δεδομένων (π.χ. στη μετεωρολογία, φυσική, χημεία, κ.λπ.²).

Το RandNLA προσελκύει σήμερα το ενδιαφέρον ερευνητών σε πανεπιστήμια, κέντρα έρευνας και εταιρείες (όπως η IBM³) καθώς και ερευνητικές επιχορηγήσεις⁴ με στόχο την ανάπτυξη θεωρητικών εργαλείων και λογισμικού. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο RandNLA υπάρχει σημαντική εκπροσώπηση από νέους Έλληνες ερευνητές οι οποίοι έχουν διακριθεί στην περιοχή⁵ και είναι όλοι απόφοιτοι του ΤΜΗΥΠ (όπως οι Δ. Αχλιόπτας, Π. Δρινέας, Ι. Κουτής, Κ. Μπέκας, Χ. Μπουτσίδης και Α. Ζούζιας). Ηγετικό ρόλο με τις πρωτοποριακές του έρευνες κατέχει ο [Πέτρος Δρινέας](#), εμπνευστής και συνδιοργανωτής του G2S3.

Επιγραμματικά, καθώς στις σημερινές εφαρμογές τα δεδομένα συχνά οργανώνονται ως τεράστιοι πίνακες αριθμών, για τη διαχείρισή τους χρησιμοποιούνται εργαλεία από την επιστημονική περιοχή της Γραμμικής Άλγεβρας (στην ορολογία της οποίας ο πίνακας έχει ειδική υπόσταση και λέγεται μητρώο ή μήτρα). Ένα κεντρικό πρόβλημα είναι να υπολογιστούν προσεγγίσεις τέτοιων μητρώων με πιο απλά ή μικρότερα μητρώα, π.χ. υπό τη μορφή παραγοντοποίησης σε μητρώα μικρότερης διάστασης. Τηρουμένων των αναλογιών, αυτό μοιάζει με την έκφραση ενός αριθμού ως άθροισμα μικρότερων αριθμών (π.χ. $1027 = 1024 + 3$) και την οικονομικότερη προσέγγισή του μόνο με μερικούς από αυτούς που είναι πιο απλοί (π.χ. το 1027 προσεγγίζεται από το 1024 που ως δύναμη του 2 είναι “απλούστερο” στο δυαδικό σύστημα). Όταν τα δεδομένα είναι μητρώα, η Γραμμική Άλγεβρα ανοίγει πολλές δυνατότητες για την οικονομική προσέγγισή τους, δυνατότητες που δεν ισχύουν για τους αριθμούς. Αυτό οδηγεί σε δραστική μείωση του κόστους μετάδοσης και διαχείρισής τους και κατά συνέπεια, σε σημαντικά οφέλη σε πλήθος επιστημονικών περιοχών.

¹Βλ. π.χ. την αναφορά <http://www.pnas.org/content/106/3/697.abstract>

² Μερικές αναφορές στον τύπο: [BHMA, FIGARO, National Geographic](#)

³ http://researcher.watson.ibm.com/researcher/view_group.php?id=5131

⁴ Βλ. π.χ. το XDATA project <http://opencatalog.darpa.mil/XDATA.html>

⁵ Βλ. την αναφορά του Joel Tropp (Caltech) στο 15’30” του <http://simons.berkeley.edu/talks/joel-tropp-2013-09-03a>

Λίγα λόγια για τον θεσμό των Gene Golub Summer Schools. Τα θερινά αυτά σχολεία δημιουργήθηκαν με κληροδότημα του αείμνηστου καθηγητή του Stanford, [Gene Golub](#) (1932-2007) ο οποίος υπήρξε πρωτοπόρος ερευνητής, ακαδημαϊκός (μέλος των the National Academy of Sciences, the National Academy of Engineering, και American Academy of Arts and Sciences) και μεγάλος υποστηρικτής και εμπνευστής νέων ερευνητών. Το G2S3 διεξάγεται ετησίως (από το 2010 στο Brindisi, Vancouver, Monterey, Σαγκάη και Linz), με διαφορετικό θέμα κάθε φορά. Το 2015, η χορηγία ενισχύθηκε από τη National Science Foundation των ΗΠΑ και έτσι έγινε δυνατή η επιχορήγηση των οδοιπορικών όλων των συμμετεχόντων. Επιπλέον, υπήρξαν χορηγίες από την Επιτροπή Ερευνών του ΠΠ, από το ΤΜΗΥΠ καθώς και ευγενείς προσφορές της Mathworks, της Xerox και της Δημοτική ενότητα Δελφών.



Καθώς η τυχαιότητα αποτελεί θεμέλιο του $\mathcal{RandNL}\mathcal{A}$, οι Δελφοί και κρίθηκε ότι ήταν φυσικός τόπος διεξαγωγής του φετινού G2S3. Το [Ευρωπαϊκό Πολιτιστικό Κέντρο Δελφών](#) προσέφερε ένα εξαιρετικό περιβάλλον διαμονής και διδασκαλίας των δύσκολων και συναρπαστικών εννοιών του $\mathcal{RandNL}\mathcal{A}$. Όπως φαίνεται και στις φωτογραφίες, παρόλο που το Σχολείο διεξήχθη στους Δελφούς, οι συμμετέχοντες «προσέγγισαν δια ξηράς» το Πανεπιστήμιο Πατρών στην εκδρομή που έγινε για ξεκούραση και καλύτερη γνωριμία με τον τόπο.

Ήταν μεγάλη τιμή για εμάς στο ΤΜΗΥΠ που μετά από μια ανταγωνιστική διαδικασία το SIAM επιχορήγησε την διεξαγωγή της σημαντικής αυτής εκδήλωσης στην Ελλάδα μέσω του Πανεπιστημίου Πατρών. Επιπλέον, οι ιδιαίτερα θετικές αξιολογήσεις των συμμετεχόντων στο G2S3 επισφραγίζουν την επιτυχή οργάνωση και έκβασή του. Μεγάλο μέρος αυτής της επιτυχίας οφείλεται κατ'αρχήν στο SIAM και στην NSF αλλά και στην αρωγή της Διοίκησης, της Επιτροπής Ερευνών, καθώς και των συναδέλφων και μεταπτυχιακών μας. Σε πείσμα των δύσκολων καιρών η συμβολή όλων ανέδειξε την αριστεία που παράγεται διαχρονικά από το ΤΜΗΥΠ και το Πανεπιστήμιο Πατρών.



καθηγητής Ε. Γαλλόπουλος
Διευθυντής HPCLAB
συνδιοργανωτής του 2015 G2S3



Τεχνικό Παράρτημα: Υπενθυμίζουμε ότι ο πολλαπλασιασμός ενός μητρώου (στήλη) με ένα μητρώο (γραμμή) έχει ως αποτέλεσμα ένα μητρώο, π.χ.

$$\text{Αν } C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}, R = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) \text{ τότε } A = CR = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_2\beta_3 \\ \alpha_3\beta_1 & \alpha_3\beta_2 & \alpha_3\beta_3 \\ \alpha_4\beta_1 & \alpha_4\beta_2 & \alpha_4\beta_3 \\ \alpha_5\beta_1 & \alpha_5\beta_2 & \alpha_5\beta_3 \end{pmatrix} \text{ π.χ. } \begin{pmatrix} 10000 & -1 & 2 \\ 20000 & -2 & 4 \\ 10000 & -1 & 2 \\ 40000 & -4 & 8 \\ 30000 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10000 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Επομένως το } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 10000.0001 & -1 & 2 \\ 20000.0001 & -2 & 4 \\ 10000.0001 & -1 & 2 \\ 39999.9999 & -4 & 8 \\ 30000.0001 & -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ μπορεί να}$$

προσεγγιστεί από το γινόμενο CR καθώς τα στοιχεία του $E = \tilde{A} - CR$, είναι σχετικά μικρά. Αν για παράδειγμα γνωρίζουμε αυτόν τον κανόνα πολλαπλασιασμού μητρώων και θέλουμε να στείλουμε (π.χ. με SMS) το A σε έναν αποδέκτη, αντί να πληκτρολογήσουμε τα 15 στοιχεία του ένα-ένα, αρκεί να πληκτρολογήσουμε τα 5 στοιχεία του C , τα 3 στοιχεία του R (δηλαδή συνολικά 8 αντί για 15 στοιχεία) και την εντολή στον αποδέκτη να τα πολλαπλασιάσει. Αν υπήρχε τέτοια προσέγγιση, επομένως, θα μπορούσαμε έναν πίνακα 1000 γραμμών και 100 στηλών να τον μεταδώσουμε «στέλνοντας» μόνον 1100 αντί για 100,000 αριθμούς και την εντολή στο άλλο άκρο να εκτελεστεί πολλαπλασιασμός. Αρκετά εντυπωσιακό, αλλά συνάμα δύσκολο και αντικείμενο μελέτης για το πότε και υπό ποιές συνθήκες είναι αυτό (κατά προσέγγιση) εφικτό για πολύ μεγάλους «πίνακες» αριθμών, π.χ. αποτελούμενους από δισεκατομύρια γραμμές και στήλες. Πιο γενικά, στο $\mathcal{RandNL}\mathcal{A}$ αναπτύσσεται θεωρία για την επίλυση θεμελιωδών προβλημάτων στους μεγάλους υπολογισμούς, όπως η προσέγγιση του γινομένου μητρώων και η επίλυση προβλημάτων ελαχίστων τετραγώνων χρησιμοποιώντας τυχαιότητα για τη μείωση της διάστασης του προβλήματος, π.χ. επιλέγοντας με κάποιο πιθανοτικό κανόνα στήλες ή και γραμμές και αναπτύσσοντας θεωρία για το κόστος και σφάλμα της διαδικασίας και λογισμικό για την υλοποίησή τους.

